Санкт-Петербургский Государственный Электротехнический Университет
Олимпиада “Математика и алгоритмы”, 2012 год

6–7 класс

1. Архипелаг состоит из островов Рыцарей, Лжецов и Хитрецов. Жители острова Рыцарей всегда говорят правду, жители острова Лжецов всегда лгут, а жители острова Хитрецов могут говорить как правду, так и ложь. Однажды встретились три жителя архипелага. Известно, что не все они с острова Хитрецов.

   Альфред сказал: “Вольфганг и Стефан с одного острова, но не с того, с которого я”.

   Вольфганг сказал: “Альфред и Стефан с одного острова, и я тоже с этого острова”.

   Стефан сказал: “Альфред и Вольфганг с разных островов”.

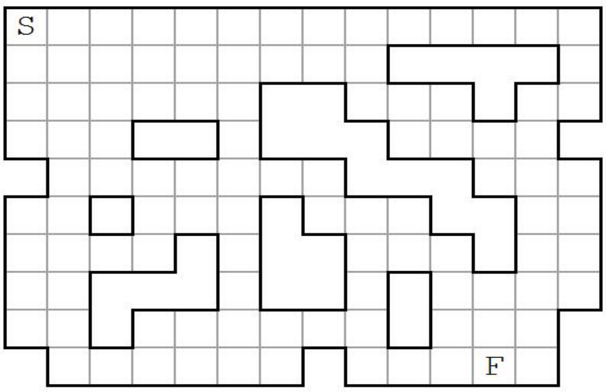
   Определите, кто из них с какого острова. Приведите все возможные варианты и объясните, почему других нет.

2. Найдётся ли хотя бы одно натуральное число n, для которого числа $n^{2012}+3n^2-7$ и $n^{2012}-2016n^2+2012$ имеют одинаковые остатки при делении на 2012?

3. Рёбра куба $ABCDA'B'C'D'$ покрасили в три цвета. Могло ли получиться так, что любой путь из вершины A в вершину C' (AC' — диагональ куба), проходящий по рёбрам куба, проходит по рёбрам всех трёх цветов?

4. На костюмированном балу, посвящённом дню города, каждый кавалер танцевал по крайней мере с половиной дам, а каждая дама — не более, чем с половиной кавалеров. Докажите, что и кавалеров, и дам было чётное число.

5. Фигура “динозавр” может ходить на одну клетку вправо или на одну клетку вниз. Сколькими способами “динозавр” может пройти из клетки, помеченной буквой S, в клетку, помеченную буквой F, на поле, изображенном на рисунке.



6. На доске написаны числа 1 и 2. Вася может увеличить любое имеющееся на доске число в 2 раза или сложить любые два имеющихся числа, после чего записать полученное число на доску. Тряпки у Васи нет, поэтому стирать с доски он не может. Как ему получить число 2012, сделав не более 20 действий?

7. Из большой шахматной доски по линиям сетки вырезана фигура F, содержащая равное число черных и белых клеток. Две клетки считаем соседними, если они имеют общую сторону. Известно, что все клетки фигуры можно обойти, передвигаясь из клетки в соседнюю с ней клетку фигуры. Обязательно ли фигуру F можно разрезать на доминошки? (Доминошка — это пара соседних клеток.)

Санкт-Петербургский Государственный Электротехнический Университет
Олимпиада “Математика и алгоритмы”, 2012 год

8–9 класс

1. Известно, что квадратное уравнение $bx^2 - (a - 3b)x + b = 0$ имеет единственный вещественный корень. Докажите, что уравнение $x^2 + (a - b)x + (ab - b^2 + 1) = 0$ не имеет вещественных корней.

2. Найдите все четвёрки вещественных чисел a, b, c, d, для которых верна система неравенств
$$\begin{cases} a^2 + b^2 \le 2cd; \\ c^2 + d^2 \le 2ab. \end{cases}$$

3. Найдите все такие целые числа n, для которых $(n^2 + n - 1)^{n+3} = 1$.

4. На сторонах треугольника ABC во внешнюю сторону построены квадраты ABMP и BCDK. Докажите, что продолжение медианы BE треугольника ABC является высотой треугольника BMK.

5. На костюмированном балу, посвящённом дню города, каждый кавалер танцевал по крайней мере с половиной дам, а каждая дама — не более, чем с половиной кавалеров. Докажите, что и кавалеров, и дам было чётное число.

6. В старинной лаборатории есть чашечные весы (которые могут показать на какой чашке груз тяжелее или равенство весов грузов, лежащих на чашках), и три набора камней по три камня в каждом. В лабораторию привезли еще один камень. Требуется определить, можно ли уравновесить новый камень тремя камнями, по одному из каждого набора. Сделайте это не более, чем за 21 взвешивание на чашечных весах. На чашечки можно класть любое количество камней.

7. В клетках квадрата 7×7 Дмитрий Александрович расставил 49 различных чисел. Федя выбирает число n от 1 до 7 и несколько квадратиков $n \times n$, а Дмитрий Александрович сообщает ему набор чисел, попавших в каждый из квадратиков. Какое наименьшее количество квадратиков Федя может выбрать, чтобы восстановить расстановку чисел в большом квадрате?

8. Из большой шахматной доски по линиям сетки вырезана фигура F, содержащая равное число черных и белых клеток. Две клетки считаем соседними, если они имеют общую сторону. Известно, что у каждой клетки фигуры F есть хотя бы 2 соседние клетки, и что все клетки фигуры можно обойти, передвигаясь из клетки в соседнюю с ней клетку фигуры. Обязательно ли фигуру F можно разрезать на доминошки? (Доминошка — это пара соседних клеток.)

Санкт-Петербургский Государственный Электротехнический Университет
Олимпиада “Математика и алгоритмы”, 2012 год

10–11 класс

1. Функция f такова, что для любых вещественных чисел m и n верно $f(mn) = f(m)f(n)$. Известно также, что $f(2012) = 2011$. Чему равно $f(0) + f(1)$? Объясните, почему Вы так считаете?

2. Решите систему уравнений: $\begin{cases} x^{2011} + y^{2011} = 1; \\ x^{2012} + y^{2012} = x. \end{cases}$

3. Найдите все вещественные корни уравнения:
$$x^{2017} - 6x^{2016} + 15x^{2015} - 20x^{2014} + 15x^{2013} - 6x^{2012} = 0.$$

4. Найдите все многочлены $P(x)$ такие, что для каждого x выполняется равенство
$$xP(x-1) = (x-10)P(x).$$

5. Четыре различных шара с радиусами 1, 1, 4 и R попарно касаются друг друга внешним образом, и касаются одной плоскости. Найдите R. (Укажите все варианты и объясните, почему других нет.)

6. На доске написано 670**...*0652 (всего 2012 звёздочек). Федя и Костя играют в игру. Федя называет цифру — Костя ставит ее на место любой звёздочки, потом Костя выбирает звёздочку — Федя ставит вместо нее любую цифру. Потом опять Федя называет цифру — Костя ставит ее на место любой звёздочки и т. д. Игра заканчивается, когда все звёздочки заменены на цифры. Федя выигрывает, если полученное число делится на 2011, Костя в противном случае. Кто может играть так, чтобы выиграть?

7. В старинной лаборатории есть чашечные весы (которые могут показать на какой чашке груз тяжелее или равенство весов грузов, лежащих на чашках), и три набора камней по семь камней в каждом. В лабораторию привезли еще один камень. Требуется определить, можно ли уравновесить новый камень тремя камнями, по одному из каждого набора. Сделайте это не более, чем за 168 взвешивание на чашечных весах. На чашечки можно класть любое количество камней.

8. В клетках квадрата 2013×2013 Дмитрий Александрович расставил 4052169 различных чисел. Федя выбирает число n от 1 до 2013 и несколько квадратиков $n \times n$, а Дмитрий Александрович сообщает ему набор чисел, попавших в каждый из квадратиков. Какое наименьшее количество квадратиков Федя может выбрать, чтобы восстановить расстановку чисел в большом квадрате?

9. Из большой шахматной доски по линиям сетки вырезана фигура F, содержащая равное число черных и белых клеток. Две клетки считаем соседними, если они имеют общую сторону. Известно, что все клетки фигуры можно обойти, передвигаясь из клетки в соседнюю с ней клетку фигуры. Более того, это свойство сохраняется при выкидывании любой клетки из фигуры F. Обязательно ли фигуру F можно разрезать на доминошки? (Доминошка — это пара соседних клеток.)